萬有引力

Jonathan Huang

1 萬有引力

1.1 牛頓定律

$$\mathbf{F} = -G\frac{Mm}{|\mathbf{r}^2|}\hat{\mathbf{r}}$$

1.2 重力場

Definition 1

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -G\frac{M}{|\mathbf{r}^2|}\hat{\mathbf{r}}$$

Definition 2

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m\mathbf{g}(\mathbf{r})$$

Theorem 1 *Gravitation fields are conservative and irrotational*

1.3 重力勢 Potential

Definition 3

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$$

Definition 4

$$V(\mathbf{r}) = -G\frac{M}{|\mathbf{r}|}$$

一般定無限遠點爲重力勢零點，除非質量分布延伸到無限

1.4 重力位能 Potential energy

Definition 5

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$$

Definition 6

$$U = -G\frac{Mm}{|\mathbf{r}|^2}$$

Problem 1 (Shell **) 證明球殼定理

Problem 2 半徑 R、質量 M 均勻球體中挖一個球形空間，其球心距原球心 a , $a < R$。求球形空間中的重力場

Problem 3 假設地球是均勻球體，挖一個洞到地心後把挖出來的土填回去，底部要給予多大的支撐力？

Problem 4 (經典地道問題 *)

1. 挖一個穿過地心的地道，跳入後多久底達另一端？最大速率？
   已知 $G = 6.67 \times 10^{-11}$, $M = 5.972 \times 10^{24}\ kg$, $R = 6.371 \times 10^{6}\ m$
2. 改成挖一個不穿過地心的地道，其離地心最近點與地心距離 d , $d < R$

Problem 5 (***) 計算質量 M 半球殼對在球心處的質點 m 的萬有引力。

Problem 6 (掉入太陽自編 ****) 太陽質量 M、半徑 R，物體質量 m，萬有引力常數 G。在離太陽 r_0 處有一艘太空船由靜止開始往太陽掉 *(有可能算不出來)*

1. 求與太陽的距離 $r(t)$
2. 要多久才會撞上太陽？

1.5 高斯定律

Theorem 2

$$\oint_{\partial V} \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{a} = -4\pi G M_{enc}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G \rho_{enc}$$

Proof: 用 δ 函數，將積分形式微分

這段跟電磁學的高斯定律基本上一樣，現在聽不懂沒關係，之後還會提到一次

Problem 7 (用高斯秒掉球殼、球體重力場)

1. 證明球殼定理
2. 內外半徑分別爲 a , b、重 M 的球殼的重力場

Problem 8 (**Bouguer plate** ***)

1. 無限大薄平板上均勻分布質量，面密度 σ，求空間中重力場
2. 無限大平板存在 $z = 0$ 到 $z = a$ 處，之間的質量分布 (密度) 只與 z 有關 $\rho(z) = \rho_0(2z^2 + z + 4)$。求在 $z = L$, $L > a$ 處質量 m 質點受力

Problem 9 (**) 無限長均勻圓柱半徑 R、密度 ρ，求對離中心軸 s 造成的重力場

2 天體力學

Theorem 3 (Kepler's laws)

1. 行星軌道是圓錐曲線
2. 等面積速率
3. $\frac{a^3}{T^2} = \text{const.}$

Problem 10 (極座標 ***) 證明克卜勒第一定律，討論不同條件下的行星軌道

Problem 11 中子星因爲極快速自轉而呈扁平，此時星體是什麼幾何形狀？