經典力學

黃紹凱

May 1, 2021

1 先備知識

1.1 牛頓力學

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

1.2 暖身 題目

用微分方程描述運動

1.2.1 Kepler I

證明廣義的克普勒第一定律：星體繞恆星的軌跡是圓錐曲線。

1.2.2 軌跡分析

半徑 R 圓盤平行地面，繞數值中心軸以角速度 ω 轉動。邊緣點 A 處以初速 v_0 發射子彈欲打中直徑 AB 另一端 B 點。假設子彈速度 $v >> R\omega$、質量極小。如何瞄準可以射中目標？以射手角度看子彈的軌跡是什麼？(From 難題集粹)

1.2.3 祐宇想出來的小題目 1

一個物體質量 m，初速 v_0、初位置 r_0，受不變向心力 f 和切線力 F 作用繞 O 運動。試描述物體軌跡、$\mathbf{r}$ 與 $\mathbf{v}$ 夾角 α。

1.2.4 祐宇想出來的小題目 2

一個物體質量 m，放在一無限大圓盤上距圓心 r_0，摩擦係數 μ_k。圓盤上有一突起長板，開始轉動時物體被以固定角速度 ω 推著繞圈運動。試描述物體軌跡。

1.3 廣義座標

n 個粒子在三維空間中自由度是 3n ，假設這系統有 h 個完整約束，需要 m=3n-h 個廣義座標和時間 t

$$\mathbf{r_i} = \mathbf{r_i}(q_1, q_2, ..., q_m, t)$$

2 分析力學

以假想的可能運動來討論物體的實際狀態。

2.1 虛位移

2.1.1 Definition:

保持時間不變，符合 h 個約束條件的無窮小位移 $\delta\mathbf{r}$

2.1.2

由 $\mathbf{r_i} = \mathbf{r_i}(q_1, q_2, ..., q_m, t)$ 可得：

$$d\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}dt + \sum_k^m \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_k}dq_k$$

2.2 虛功

2.2.1 Definition:

施加於某物體的作用力，由於給定的虛位移，所做的機械功

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r}$$

2.3 虛功原理 D'Alembert's principle

2.3.1 廣義:

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - m_i\dot{\mathbf{v}}_i - \dot{m}_i\mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$$

2.3.2 Statement:

對一個物體施外力，行經符合約束條件的虛位移，所作的虛功的總和等於零，則系統處於靜態平衡

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - m_i\mathbf{a}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$$

2.3.3 Derivation:

2.3.4 達朗貝爾假想力原理

一個物體在非慣性座標中的運動等價於在慣性座標中受一假想力

3 變分

3.1 數學

3.1.1 泛函 Functional

不妨假設

$$J[y(x)] = \int_a^b f(y(x), y'(x), x)\, dx$$

3.1.2 Definition

曲線 $y(x)$ 的極值爲 $\hat{y}(x)$，則可定義 $y(x)$ 的變分 $\delta y = \hat{y} - y$。
對 functional J[y] 取 functional derivative

3.1.3 極值

令 $\delta y(x) = \epsilon\eta(x)$，有 ϵ 的函數 $I(\epsilon) = J[y + \epsilon\eta]$。令：

$$\left.\frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0$$

3.2 Euler-Lagrange equation

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

3.3 Euler-Poisson equation

對於 $f(y(x), y'(x), ..., y^{(n)}, x)$ 有

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}\right) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right) = 0$$

3.4 Beltrami's Identity 等下可 用到

當 F 不是 x 的顯函數時，有

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C$$

3.5 Derivation

3.6 Lagrange multiplier

要解決有 *constraint* 問題時很好用
$c(x) = 0$ 是約束條件

$$f(y, y', x, \lambda) = y(x) - \lambda c(x) = 0$$

3.7 題目

基本的數學

3.7.1

證明兩點最短路徑是直線。

3.7.2 大地線

證明球上兩點間最短距離是大圓軌道

4 拉格朗日力學 Lagrangian mechanics

4.1 Hamilton's principle: 最小作用量原理

$$\mathbf{S} = \int_a^b L(q(t)_i, \dot{q}(t)_i, t)\, dt$$

眞實路徑使 $\delta\mathbf{S} = 0$

4.2 equation of motion

古典力學的運動方程由 $q(t), \dot{q}(t), t$ 組成

4.3 拉格朗日量

$$L = T - V$$

4.4 Euler-Lagrange equation

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}i}\right) = \mathcal{F}_i$$

4.5 Extended Hamilton principle

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta W + \delta T)\ dt\ = 0$$

4.6 Derivation (an analytical approach):

4.7 題目

4.7.1 自由斜面

質量 m 物體滑下質量 M、長 L 自由斜面（斜角 β），滑到底花的時間爲多少？

4.7.2 減少表面能

兩個鐵圈共軸，拉開距離 L，半徑 R_1 、R_2。求肥皂膜的軌跡方程。

4.7.3 Brachistochrone problem

證明最速降線是擺線（迂迴線），並求運動所花的時間 T。

4.7.4 懸鏈線

證明在均勻重力場中，使均勻細繩系統重力勢最小的曲線方程。

4.7.5 費馬原理

證明費馬最短時間原理，推導 $Snell's\ law$。

4.7.6 小證明

Suppose a string is tied between two fixed end points $x = 0, y = 0$ and $x = l, y = 0$. Let $y(x,t)$ be the small transverse displacement of the string from its equilibrium at position $x \in (0,l)$ and $t > 0$. The string has mass μ per unit length, and constant tension F. Show that the kinetic and potential energies are given by:

$$T = \frac{\mu}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx$$

$$V = F\int_0^l \left(\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} - 1\right) dx$$

5 哈密頓力學 Hamilton mechanics

5.1 哈密頓量

$$H = T + V$$

5.2 Hamilton's equations

$$H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \dot{Q}_i P_i - L$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -p_i \ , \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = q_i \ , \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

5.3 Derivation:

5.4 相空間

5.4.1 很酷的概念

相空間是一個用以表示出一系統所有可能狀態的空間

5.4.2 phase diagram

5.5 Liouville's Theorem

在能量守恆的前提下，相空間中一個封閉曲面圍出的面積是常數。可稱爲 conservation of density in phase space

5.6 Derivation:

5.7 題目

5.7.1 求哈密頓量

A system is described by the Lagrangian

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2) - V(r)$$

Calculate the Hamiltonian of the system; is it the energy of the system? Note that the form of the potential energy is irrelevant

5.7.2 Poisson brackets

Consider a function $y(q, p)$ of coordinates q and p. Show that the time derivative of f can be written as

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}$$

This is the definition of the Poisson bracket, where

$$\{f(q,p), g(q,p)\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$$

5.7.3 Noether Theorem

Show that space translational symmetry leads to the conservation of momentum, time translational symmetry leads to the conservation of energy, and rotational symmetry leads to the conservation of angular momentum

6 補充：絕熱不變量 Adiabatic Invariant

6.1 作用量

古典力學中作用量是一個絕熱不變量 (quasi-conserved quantity)

6.2

用哈密頓力學和牛頓力學討論一個擺長緩慢變化之單擺的振幅和能量變化，結果一樣