練習題目

黃紹凱
物理/數學家教課

April 4, 2026

Problem 0. [範例] 一台火車以速度 v 向山洞前進，發出頻率 f 的汽笛聲。若空氣中音速爲 $v_{\rm s}$，試求火車上的人聽到的「拍頻」（beat frequency）爲何？

Solution. 當兩個頻率相近的聲波發生干涉，會在高頻率音調上再產生週期性的「嗡嗡聲」，這個聲音被稱爲拍音，其頻率爲

$$\Delta f = f' - f. \tag{1}$$

因爲都卜勒效應，經山洞反彈後回傳的笛聲頻率爲

$$f'' = \frac{v_{\rm s}+v}{v_{\rm s}} f' = \frac{v_{\rm s}+v}{v_{\rm s}} \frac{v_{\rm s}}{v_{\rm s}-v} f = \left(\frac{v_{\rm s}+v}{v_{\rm s}-v}\right) f. \tag{2}$$

則拍音就可以算出來了：

$$\Delta f = f'' - f = \left(\frac{v_{\rm s}+v}{v_{\rm s}-v} - 1\right) f = \left(\frac{2v}{v_{\rm s}-v}\right) f \approx \frac{2v}{v_{\rm s}} f. \tag{3}$$

□

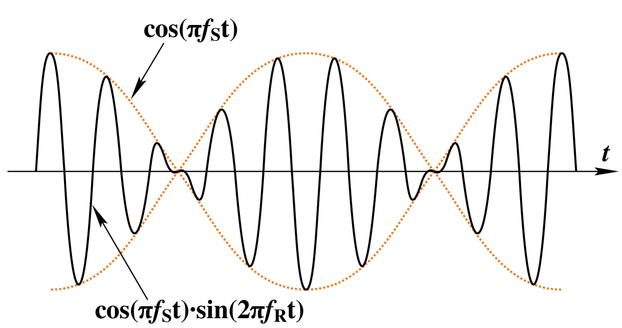

Figure 1: 拍頻示意圖

Problem 1. [天體力學]

(a) 寫下三條克卜勒運動定律。

(b) 將質量 m 的小球以相對地面 θ 仰角（$0 < \theta < \pi/2$）以初速 v 拋出，已知地球半徑爲 R、萬有引力常數爲 G、地球質量爲 $M \gg m$。試求小球需要花多少時間才會落回地面？

(c) 若將地球近似爲平面，且重力加速度 $g = GM/R^2$ 近似爲常數，(b) 小題中的答案應該要是

$$T = \frac{2v\sin\theta}{g} = \frac{2R^2 v\sin\theta}{GM}. \tag{4}$$

試寫下初速 v 需要符合什麼條件，才能讓這個近似答案是合理的。

(d) 把質量分別爲 M、m 的兩個質點距離 d 靜止放開，讓它們在太空中透過重力互相吸引。試求要多久兩顆球會撞在一起？

Solution.

(a) (I) 行星的運行軌跡是圓錐曲線（橢圓、拋物線、雙曲線）。

(II) 行星運行時的面積速率爲定值。

(III) 行星以橢圓軌道運行時 T^2/a^3 爲定值，其中 a 是軌道的半長軸。

(b) 小球落回地面需要

$$t = 2\sqrt{\frac{\left(\frac{2}{R} - \frac{v^2}{GM}\right)^{-3}}{G(M+m)}} \arctan\left\{\cot\theta\left[1 - \left(1 - \frac{vR\cos\theta\left(\frac{2}{R} - \frac{v^2}{GM}\right)}{\frac{GM}{vR\cos\theta} - \sqrt{\left(\frac{GM}{vR\cos\theta}\right)^2 + v^2 - \frac{2GM}{R}}}\right)^2\right]^{-1/2}\right\}. \tag{5}$$

注意：這個答案可能有很多種等價的表示方法。

(c) 初速度 v 符合

$$v \ll \sqrt{\frac{2GM}{R}} \tag{6}$$

或

$$v \ll \sqrt{\frac{GM}{R}} \tag{7}$$

(d) 根據克卜勒第三定律：

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{d^3}{2G(M+m)}}. \tag{8}$$

□

Problem 2. [碰撞]

(a) 兩個質點質量分別爲 m_1、m_2，速度同方向且分別爲 v_1、v_2。寫下它們做完一維彈性碰撞後的速度公式。

(b) 大球質量 m_1、小球的質量 m_2 且 $m_1 \gg m_2$。一開始兩球皆靜止，大球的底部距離地面 h，小球距離地面距離 $h+l$，且大球、小球間有很小的距離。將大球和小球如圖 2 放開，試求出小球最高可以彈到多高？提示，你的答案應該會跟 m_1、m_2 無關。

(c) 將 (b) 的情況推廣成有 n 顆球，B_i 的質量爲 m_i，且下面的球總是比上面的球重很多：$m_1 \gg m_2 \gg \cdots \gg m_n$。最上面的球 B_n 距離地面 $h+l$，試求放開後 B_n 最高可以彈到多高？

(d) 如果不考慮彈性碰撞，而是每一次碰撞都損失 $(1-\varepsilon)$ 的能量（即彈性係數爲 ε），則 (b) 小題的答案會變成什麼？

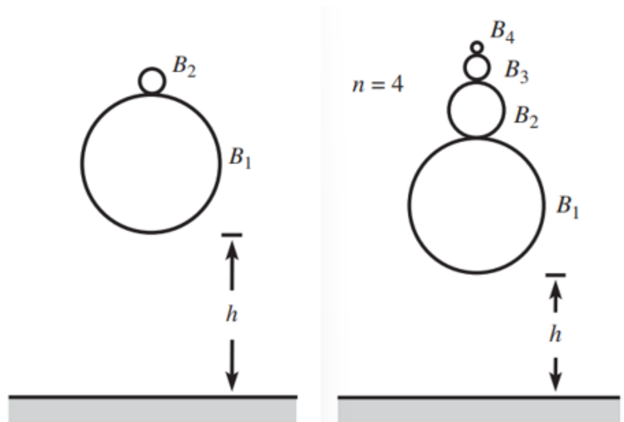

Fig. 5.25　　Fig. 5.26

Figure 2: 碰撞

Solution.

(a) 彈性的碰撞公式爲

$$
\begin{aligned}
v_1' &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{(2m_2}{m_1 + m_2} v_2, \\
v_2' &= \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} v_2 + \frac{(2m_1}{m_2 + m_1} v_1.
\end{aligned} \tag{9}
$$

(b) 小球最高高度爲 $H = l + 9h$。

(c) 小球最高高度爲 $H_n = l + (2^n - 1)^2 h$。

(d) 彈性係數 ε 的碰撞公式可以寫成

$$
\begin{aligned}
v_1' &= \frac{m_1 - \sqrt{\varepsilon} m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{(1+\sqrt{\varepsilon}) m_2}{m_1 + m_2} v_2, \\
v_2' &= \frac{m_2 - \sqrt{\varepsilon} m_1}{m_2 + m_1} v_2 + \frac{(1+\sqrt{\varepsilon}) m_1}{m_2 + m_1} v_1.
\end{aligned} \tag{10}
$$

因此小球高度最高爲 $H_n = l + \left[2\left(1+\sqrt{\varepsilon}\right)^{n-1} - 1\right]^2 h$。

□

Problem 3. [光學] 一面鏡子以角速度 ω 旋轉，距離轉軸 a 處有一個光源，試問光源在鏡子中的像的移動速率為何？

Problem 4. 輸送帶上的沙漏以每秒鐘 s 公斤的速率將砂粒垂直滴到輸送帶上

(a) 需要對輸送帶施加多少的水平力來讓它維持等速度運動？

(b) 沙子每單位時間獲得的動能是多少？

(c) 每單位時間需要做多少功來維持系統運轉？

(d) 過程中每單位時間以熱能的方式損失了多少能量？

注意到雖然我們完全沒有假設有摩擦力等次理想的情況，但是能量還是在這個過程中損失了–這是一個本質上非彈性的碰撞過程！

Problem 5. [109 北市物理能競] 如圖 3 所示，一質量為 m，半徑為 R 的實心均勻球體，質心以速度 v 向右純滾動，靠近一高度為 H，質量為 M 的大木塊。假設球與木塊發生的碰撞為非彈性碰撞，即球上與碰撞點 A 接觸的點，其速度在碰撞後之瞬間為 0，碰撞過程中，木塊不會離開地面且木塊與水平地面之摩擦可不計，計算下列各題：

(a) 設 θ 為球體質心 O在碰撞時與碰撞點 A 的連線 OA與水平線的夾角，求 $\sin\theta$ 為何？(以 R，H 表示)

(b) 設碰撞後瞬間木塊的速度為 av，求 a 為何？設碰撞後瞬間，球體質心相對木塊的速度為 bv，求 b 為何？(以球體對質心的轉動慣量 I，R，m，M，θ 表示)

(c) 在球體與木塊保持接觸的情況下，求球體能滾動達到木塊頂部的最小速度 $v_{\min}$ 為何？(以重力加速度 g，a，b，R，H，I，m，M，θ 表示)

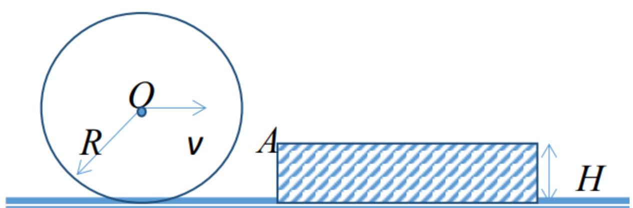

Figure 3: 滾動過程

Answer. 這題不容易寫，所以把參考答案附上來（如果算出來跟答案不完全一樣不要緊張，官方答案有可能是錯的）

(a) $\sin\theta = \frac{R-H}{R}$

(b)

$$a = \frac{m}{m+M}\frac{I(1-\sin\theta)+mR^2\sin^2\theta}{I+mR^2\cos^2\theta+\frac{mM}{m+M}R^2\sin^2\theta},\quad b = \frac{I+\frac{mM}{m+M}R^2\sin\theta}{I+mR^2\cos^2\theta+\frac{mM}{m+M}R^2\sin^2\theta} \tag{11}$$

(c)

$$v_{\min} = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{2mgH}{I+\left(\frac{mM}{m+M}\sin^2\theta+m\cos^2\theta\right)R^2}} \tag{12}$$

□

Problem 6.

1. 一個質量 M 的巨大平面以速度 V （垂直於平面的方向）移動經過一個區域，這個區域裡面每單位體積有 n 個質量 m、速率 v、隨機移動的質點。假設質點間沒有作用力且 $m \ll M$：
   (1) 若 $V \gg v$，平面受到每單位面積上的阻力爲何？
   (2) 若 $V \ll v$，平面受到每單位面積上的阻力爲何？
2. 將平面換成質量 M、半徑 R 的硬球，則球以 V 移動時受到的總阻力爲何？

以上問題幫助我們從碰撞的觀點理解空氣阻力的來源，以及爲什麼空氣阻力跟物體移動的速度有特定的關係。這個簡單的動力學模型由牛頓在17世紀時提出。

Problem 7. [電路學]

(a) 根據圖 4，試求出通過 12V、16V 電池的電流爲何。

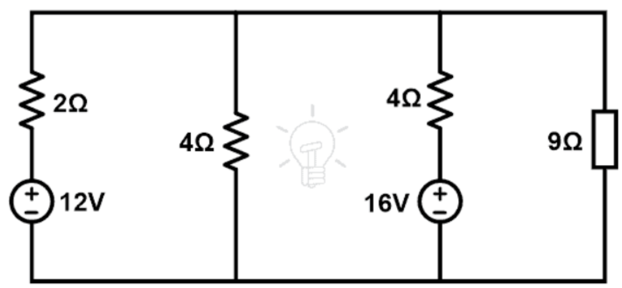

Figure 4: 電路圖1

(b) 根據 5，試求出通過此電路的電流。

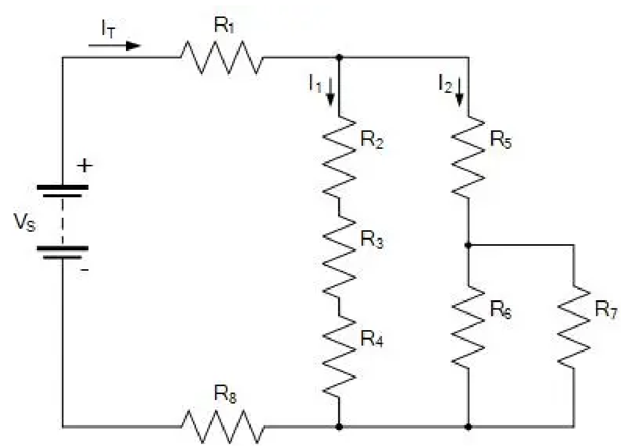

Figure 5: 電路圖2

Problem 8. [近代物理]

(a) 簡單解釋什麼是霍爾效應（Hall effect），以及如何用霍爾效應實驗驗證電流中流動的是負電載子（電子）而不是正電載子（原子核）。

(b) 光的都卜勒效應需要考慮狹義相對論效應，都卜勒紅/藍移後的頻率可以寫作

$$f' = \sqrt{\frac{c \pm v}{c \mp v}} f. \tag{13}$$

假設 Na 原子能皆爲 hf，我們讓 Na 原子相對雷射光以速度 v 移動，則此時只需要用什麼頻率 f' 的雷射光就可以激發 Na 原子？注意到這個頻率比原本需要的頻率 f 還要低。

(c) 延續 (b) 小題，Na 原子吸收頻率 f' 的光波後，電子躍遷回到基態會放出 f 的光。在這個激發–放光過程中，Na 原子損失了多少能量？我們可以透過重複以上過程來降低原子的能量！

在 (b)、(c) 小題中探討的過程被稱爲「都卜勒冷卻」，這類的雷射冷卻是實驗中用來將原子冷卻到極低溫的方法。提出這個簡單但厲害的概念的科學家，Steven Chu、Claude Cohen-Tannoudji 和 William Phillips 榮獲 1997 的諾貝爾物理學獎。

Problem 9. [應用數學：線性代數]

(a) 求以下矩陣的反矩陣：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

B 是可逆矩陣（即B的反矩陣存在）的條件是什麼？

(b) 寫下三維空間中繞 z 軸順時針旋轉 θ 弧度的旋轉矩陣。提示：這是一個 3×3 的矩陣。

(c) 在生物物理學中，代謝過程的動力學可以用「反應係數矩陣」（stoichiometric matrix）來簡單表示。考慮以下幾個反應係數矩陣的例子，試選出哪些是可逆矩陣。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

注意到生物物理研究的反應系統大多時候是由不可逆矩陣來描述，因爲系統的已知變量不夠多。

Problem 10. [應用數學：微積分] 試計算以下的積分或微分：

(a) 求

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sec^3 x \tag{16}$$

(b) 定義分段函數

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{17}$$

注意到當 $x \to 0$有$f(x) \to 0$，所以f是一個「連續函數」（即我們可以一筆畫把f的圖形畫出來）。試計算f'。

(c) 計算

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, \mathrm{d}x, \qquad \int \sec x \, \mathrm{d}x. \tag{18}$$

提示：第二個積分，分子分母同乘以$\sec x + \tan x$。